EWMS, Serie 1

Jamal Drewlo, 179917

11. November 2020

Aufgabe 1

Wir bestimmen den Ergebnisraum wie folgt:

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_6) : \omega_i \in \{1, \ldots, 49\}, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

Wir achten hier auf die Reihenfolge (daher Tupel) damit wir offensichtlich ein Laplace-Experiment erhalten (Man hätte auch nicht auf Reihenfolge achten brauchen, also statt Tupel dann Mengen als Elementarereignisse. Da wäre auch ein Laplace-Experiment rausgekommen). Da wir beim Ziehen die Kugeln **nicht** zurücklegen dürfen je zwei verschiedene Komponenten eines Tupels nicht gleich sein.
Sei A nun unser Ereignis "Genau 5 richtige". Da wir es mit einem Laplace-Experiment zu tun haben gilt also

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{49 \cdot \ldots \cdot 44}$$

Bleibt also noch $\#A$ zu bestimmen. Zuallererst können wir uns aussuchen wo die falsche Zahl vorkommt. Also ob an erster, zweiter,..., sechster Stelle. Dafür gibt es klar 6 Möglichkeiten. Nehmen wir *o.B.d.A* an, dass an erster Stelle nicht unsere Zahl kommt. Dafür gibt es 43 Möglichkeiten. Für ω_2 haben wir jetzt 6 Möglichkeiten, für ω_3 5 usw. bis wir bei ω_6 nur noch 2 Möglichkeiten haben. Insgesamt kommen wir also auf

$$\#A = 6 \cdot 43 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 = 185760$$

Somit schließlich

$$P(A) = \frac{185760}{49 \cdot \ldots \cdot 44} = 1.844989 \cdot 10^{-5}$$

Aufgabe 2

Wir modellieren das Zufallsexperiment wie folgt:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

mit $\#\Omega = 6^3 = 216$. Natürlicherweise nehmen wir als σ-Algebra

$$\mathcal{A} = 2^\Omega$$

Auch hier haben wir es mit einem Laplace-Experiment zu tun. Sei nun

$$N_k := \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : k \leq \min\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$$

das Ereignis, dass die ausgewürfelte Note nicht besser als k ist. In jedem Wurf können also nur die Zahlen $k, \dots, 6$ gewürfelt werden. Man hat also für jeden Wurf $6 - k + 1$ Möglichkeiten, somit

$$\#N_k = (6 - k + 1)^3$$

Sei nun

$$A_k := \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : k = \min\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$$

das Ereignis, dass die Note k ausgewürfelt wird. Klar ist, dass $A_k \subseteq N_k$ und dass A_k alle Elemente aus N_k enthält, abzüglich jener, wo k nie gewürfelt wurde. Für genau so ein Ereignis hat man für jeden Wurf $6-k$ Möglichkeiten. Insgesamt haben wir also

$$\#A_k = \#N_k - (6 - k)^3 = (6 - k + 1)^3 - (6 - k)^3$$

und

$$P(A_k) = \frac{\#A_k}{\#N_k} = \frac{(6 - k + 1)^3 - (6 - k)^3}{216}$$

Setzen wir also für k alle Werte ein, haben wir

$$P(A_1) = \frac{216-125}{216} = \frac{91}{216}$$
$$P(A_2) = \frac{125-64}{216} = \frac{61}{216}$$
$$P(A_3) = \frac{37}{216}$$
$$P(A_4) = \frac{19}{216}$$
$$P(A_5) = \frac{7}{216}$$
$$P(A_6) = \frac{1}{216}$$

Aufgabe 3

Dieses Argument ist falsch. Zur Begründung Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten. Wir modellieren das Experiment:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

sowie $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{216}$$

für alle $\omega \in \Omega$. Nun ermitteln wir die günstigen Ergebnisse für die Ereignisse A 'Augensumme 11' und B 'Augensumme 12'. Tatsächlich sind die im Argument angegebenen Konfigurationen die einzigen um die gewünschten Augensummen zu erhalten, allerdings müssen wir noch deren Umordnungen beachten um $\#A$ und $\#B$ zu bestimmen. Man sieht sofort, dass eine Summe aus 3 verschiedenen zahlen (z.B 5+4+2) genau $3! = 6$ Umordnungen hat. Eine Summe aus zwei verschiedenen Zahlen (z.B. 6+3+3) hat nur 3 Umordnungen, und eine aus drei gleichen Zahlen natürlich nur eine einzige. Addiert man so alle Möglichkeiten für jede günstige Konfiguration, so erhält man schließlich

$$\#A = 27$$

und

$$\#B = 25$$

Insbesondere also $P(A) > P(B)$.

Aufgabe 4

(i)
Wir modellieren das Zufallsexperiment wie folgt:

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots, N\}, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

mit $\#\Omega = N(N-1)\dots(N-n+1)$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega}$ für alle $\omega \in \Omega$. Nun bestimmen wir alle möglichen Ereignisse für den Ausgang $E_k =$ 'k ist die größte gezogene Zahl'. Zu allererst muss k selbst gezogen werden. Dafür gibt es n Stellen an denen das geschehen kann. Nehmen wir an, dass k an einer diesen festen Stelle gezogen wird, so müssen wir die verbleibenden $n-1$ Komponenten mit Zahlen kleiner k füllen. Das heißt wir haben zuerst $k-1$ Möglichkeiten, danach $k-2$ usw. bis $k-n+1$ Möglichkeiten. Somit ergibt sich

$$\#E_k = n(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$$

also

$$\begin{aligned} P(E_k) = \frac{\#E_k}{\#\Omega} &= \frac{n(k-1)\dots(k-n+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)} \\ &= \frac{(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} \frac{n!}{N(N-1)\dots(N-n+1)} \\ &= \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, dass obige Formeln (bis auf den finalen Term) nur für $k \geq n$ stimmen. Falls aber $k < n$ so ist ja logischerweise $P(E_k) = 0$. Somit stimmt auch für diesen Fall unsere Formel, wenn man die Konvention

$$\binom{m}{n} := 0$$

für $m < n$ verwendet.

(ii)
Da in unserer Formel N ausschließlich im Nenner steht, wird $P(E_k)$ maximal für minimales N. Natürlich ist im Fall $N < k$ die k-te Kugel gar nicht in der Urne, also $P(E_k) = 0$. Somit wird $P(E_k)$ maximal für $N = k$.